**Vektorok összeadása:** A megfelelő koordinátákat összeadjuk.

**Vektor skalárra való szorzása:** Minden koordinátát megszorzunk a skalárral.

**Tétel:** 2 vektor egyenlő, ha a megfelelő koordináták egyenlőek.

**Altér:** Rn tér w részhalmaza altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

**Lineáris kombináció:** Az Rn tér v1, v2, … vk vektorainak lineáris kombinációi a

λ1v1 + λ2v2 + · · · + λk vk ; λ1, λ2, . . . , λk ∈ R, alakú (Rn -beli) vektorok.

**Lineáris függőség:** Az Rn tér egy {v1, v2, …, vk } vektorrendszerét lineárisan függőnek nevezzük, ha léteznek olyan λ1, λ2, . . . , λk ∈ R nem mind 0 skalárok,

hogy λ1v1 + λ2v2 + … + λk vk = 0.

**Lineáris függőség alapesetei:**

- Ha 2 vektor arányos

- Ha tartalmazza a nullvekort

- Ha valamelyik vektor előáll a többi lineáris kombinációjaként

**Lineáris függetlenség:** Az Rn tér egy {v1, v2, …, vk } vektorrendszerét lineárisan függőnek nevezzük, ha *nem* léteznek olyan λ1, λ2, . . . , λk ∈ R nem mind 0 skalárok,

hogy λ1v1 + λ2v2 + … + λk vk = 0.

**Tétel:** V1, V2… lineárisan függetlenek, ha bármely lineáris kombinációjuk csak akkor egyenlő, ha a lineáris kombinációjuk minden együtthatója 0.

**Tétel:** V1, V2, V3 lineárisan független, ha nem esnek egy síkba.

**Tétel:** Rn-ben bármely vektor felírható n db lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként.

**Bázis:** Rn-ben bármely n darab lineárisan független vektorát bázisnak nevezzük.

**Mátrix:** Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot m×n-es mátrixnak nevezünk.

**Mátrixok összeadása/kivonása:** Megfelelő koordinátákat összeadom. Csak azonos mátrixokat lehet összeadni/kivonni egymásból.

**Mátrixok skalárral való szorzása:** Minden koordinátát megszorzunk a skalárral.

**Mátrixszorzás:** Legyen A = (aij) egy m × k, B = (bij) pedig egy k × n típusú mátrix. Ekkor A és B szorzata az a C = (cij) m × n típusű mátrix, amelyre:

**Mátrixszorzás tulajdonságai:** Megegyezik a vektorokéval, kivéve hogy A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában AB != BA.

**Tétel:** Szorzatmáxrix i-edik sorának j-edik eleme az A mátrix i-edik sorának a B mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata.

**Mátrix transzporáltja:** Legyen A egy m × n-es mátrix. Azt az AT -vel jelölt n × m-es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai, A transzponáltjának nevezzük.

**Speciális Mátrixok:**

* Négyzetes Mátrix: Sorai és Oszlopai megegyezik
* Sormátrix: 1 sorból álló mátrix
* Oszlopmátrix: 1 oszlopból álló mátrix
* Szimmetrikus mátrix: A Mátrix átlóján keresztül szimmetrikus
* Ferdeszimmetrikus mátrix: Az átlón keresztül megegyezik a (-1)\*-vel
* Háromszög mátrix: A mátrix átlója felett/alatt csak nullák találhatók
* Nullmátrix: Minden eleme nulla
* Egységmátrix: Az átló egyesekből áll, minden más 0

**Inverz:** Azt mondjuk az A n-edrendű négyzetes mátrixról, hogy invertálható, vagy létezik az inverze, ha létezik olyan B n-edrendű kvadratikus mátrix, hogy AB = BA = En.

**Tétel:** Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A-1

Kiszámítás: A-1 = (1/det(A)) \* (Aij)T

**Permutáció:** Egy σ permutáció páros, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és páratlan, ha ez a szám páratlan.

**Determináns:** olyan matematikai fogalom, amely egy négyzetes mátrixhoz van rendelve, és segítségével számos fontos tulajdonságot lehet meghatározni a mátrixról.

**Determináns tulajdonságai:**

* det(A) = det(AT )
* Ha A valamely sora csupa 0 elemből álll, akkor det(A) = 0.
* Ha A két sorát felcseréljük, a determináns −1-szeresére változik.
* Ha A két sora egyenlő, akkor det(A) = 0.
* Ha A valamely sorát megszorozzuk egy λ valós számmal, akkor az így kapott mátrix

determinánsa λ · det(A).

* Ha A minden sorát megszorozzuk egy λ számmal és A n-edrendű, akkor a kapott

mátrix determinánsa λn · det(A).

* Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor det(A) = 0.
* Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
* Ha A valamely sora előállítható a többi sor lineáris kombinációjaként, akkor

det(A) = 0.

* A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

**Determináns kiszámításai:** Sarrus szabály, Kifejtési tétel, Gauss elimináció

**Altér dimenziója:** Az Rn tér egy altere k dimenziós, ha tartalmaz k lineárisan független vektort, de k + 1 darabot már nem

**Vektorrendszer rangja:** Tekintsük Rn egy A vektorrendszerét. Az A vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója: rang(A) = dim(L(A)).

**Mátrix rangja:** Egy mátrix rangja alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: rang(A).

**Megoldhatóság:** Ha van megoldása az egyenletrendszernek

**Határozott megoldhatóság:** Ha pontosan 1 megoldása van az egyenletrendszernek

**Határozatlan megoldhatóság:** Ha több megoldása van az egyenletrendszernek

**Ellentmondás:** Ha nincs megoldása az egyenletrendszernek

**Tétel:** Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha rang(A) = rang(A|b).

Ha megoldható és rang(A) = n (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha rang(A) < n, akkor határozatlan.

**Homogén egyenletrendszer:** A lineáris egyenletrendszer homogén, ha b = 0, azaz ekkor mátrixos alakja Ax = 0. Különben a lineáris egyenletrendszer **inhomogén.**

**Megoldástér:** Egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot Rn-ben, melynek dimenziója n − rang(A).

**Lineáris transzformáció:** Legyen adott egy A n × n-es mátrix. Az Rn ----> Rn , v ---> Av leképezést az Rn tér egy lineáris transzformációjának hívjuk.

**Sajátérték és sajátvektor:** Tekintsünk Rn -ben egy A mátrixszal adott lineáris transzformációt. Egy nem-nulla v ∈ Rn vektort A sajátvektorának hívunk, ha ∃λ ∈ R: Av = λv. Ekkor λ-t a transzformáció v-hez tartozó sajátértékének mondjuk.

**Tétel:** det(A- λE) = 0 megoldása adja A sajátértéktét.

**Tétel:** A mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai λ vektor, amely megoldása az

(A- λE) \*X= 0)

**Karakterisztikus polinom:** Egy A lineáris transzformáció (vagy mátrix) karakterisztikus polinomja a det(A − λEn) n-edfokú polinom, ahol n a tér dimenziója. Ennek gyökei éppen a lineáris transzformáció sajátértékei. A sajátértékek szorzata éppen a mátrix determinánsa.

**Kvadratikus függvény:** Legyen A egy n × n-es szimmetrikus mátrix, és Rn elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor a Q : Rn → R, x → Q(x) := xT Ax függvényt kvadratikus függvénynek vagy kvadratikus formának nevezzük.

**Definitség – tétel:** A Q(x) = xT Ax kvadratikus függvény pontosan akkor:

* pozitív definit, ha A összes sajátértéke pozitív;
* pozitív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≥ 0;
* negatív definit, ha A összes sajátértéke negatív;
* negatív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≤ 0;
* indefinit, ha A-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

**Tétel:** Tekintsük ismét az A szimmetrikus mátrixból származó Q kvadratikus formát, és jelölje ∆k az A mátrix bal felső k-adrendű sarokdeterminánsát (vagy sarokfőminorát),azaz

∆1 = a11, ∆2 = , . . . , ∆n = |A|.

A Q kvadratikus függvény pontosan akkor:

* pozitív definit, ha ∆k > 0 minden k = 1, . . . , n esetén;
* negatív definit, ha (−1)k∆k > 0 minden k = 1, . . . , n esetén.

**Skaláris szorzat:** Legyen A egy n × n-es szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és Rn elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor az **⟨ x,y⟩A:=** xT Ay mennyiséget az x és y vektorok skaláris vagy belső szorzatának nevezzük. Az Rn teret ellátva egy **⟨,⟩**A : Rn × Rn → R függvénnyel euklideszi térnek mondjuk. Jele: E = (Rn **⟨,⟩**A).

**Skaláris szorzat tulajdonságai:**

* első változójában additív
* első változójában homogén
* szimmetrikus
* pozitív definit

**Vektorok normája:** Tekintsünk egy E = (Rn , **⟨,⟩**) euklideszi teret, ahol a skaláris szorzatot az A mátrix származtatja egy x ∈ Rn vektor normája vagy hossza := =

**Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:** Az E = (Rn , **⟨,⟩**) euklideszi tér tetszőleges x,y vektoraira . Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y egymás skalárszorosa.

**Tétel:** Legyen x és y az E euklideszi tér 2 nem-nulla vektora. Ekkor az x és y által bezárt szög: arccos \* ().

**Ortogonális:** Azt mondjuk, hogy x és y merőlegesek vagy ortogonálisak, ha

**Ortogonális Mátrix:** Egy négyzetes Q mátrix ortogonális, ha Q−1 = QT .